CHƯƠNG 1. MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

1.1 Ma trận

1.1.1 Định nghĩa.

Ma trận A cấp $m \times n$ trên R là một bảng số hình chữ nhật gồm m hàng và n cột được biểu diễn như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

Trong đó:

$a_{ij} \in R$: là phần tử thuộc dòng i và cột j của ma trận A.

m : số dòng của ma trận A.

n : số cột của ma trận A.

$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$: dòng thứ i của ma trận A.

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$: cột thứ j của ma trận A.

Ký hiệu $M_{m\times n}(R)$ là tập hợp các ma trận cấp $m \times n$ trên R.

Ví dụ. Xét ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Ma trận B là ma trận cấp 2×3.

1.1.2 Các dạng đặc biệt của ma trận.

1) Ma trận dòng

Ma trận dòng là ma trận có một dòng và n cột, ký hiệu là A = $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

2) Ma trận cột

Ma trận cột là ma trận có m dòng và một cột, ký hiệu là : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Ma trận không:

Ma trận không là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0, ký hiệu $0 = 0_{m\times n}$

Ví dụ. $0 = 0_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Ma trận vuông cấp n:

Ma trận vuông cấp n là ma trận có số dòng và số cột bằng n, ký hiệu là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(a_{\mathrm{ij}}\right)_n$$

Tập hợp các ma trận vuông cấp n được ký hiệu : $A \in M_n(R)$.

Đường thẳng đi qua các phần tử $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ được gọi là đường chéo chính của ma trận A. Đường thẳng đi qua các phần tử $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, ..., a_{n1}$ được gọi là đường chéo phụ của ma trận A.

Ví dụ.

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ là một ma trận vuông. Đường thẳng đi qua các phần tử 1,2,-3 là đường chéo chính.

5) Ma trận tam giác

Ma trận tam giác trên là ma trận vuông có các phần tử nằm phía dưới đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ma trận tam giác dưới là ma trận vuông có các phần tử nằm phía trên đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

6) Ma trận chéo

Ma trận chéo là ma trận vuông có các phần tử không nằm trên đường chéo chính bằng 0

Ví dụ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

7) Ma trận đơn vị cấp n

Ma trận đơn vị cấp n là ma trận chéo có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1. Ký hiệu là $I = I_n$.

Ví dụ. $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8) Ma trận chuyển vị

Chuyển vị của ma trận A là ma trận có được từ A bằng cách viết các hàng của ma trận A theo thứ tự thành cột, ký hiệu là A^t.

Ví dụ. Cho $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Khi đó $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

9) Ma trận đối xứng

Ma trận vuông $A=\left(a_{ij}\right)_n$ gọi là ma trận đối xứng nếu $a_{ij}=a_{ji}, \forall i, j=\overline{1,n}$, tức là $A=A^t$

Ví dụ. Ma trận $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ là một ma trận đối xứng.

1.1.3 Các phép toán về ma trận

1) Hai ma trận bằng nhau.

Hai ma trận cùng cấp $A \in M_{n\times m}(R)$ và $B \in M_{n\times m}(R)$ gọi là bằng nhau nếu các phần tử tương ứng của chúng bằng nhau, tức là: $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} (\forall i, j)$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & a+b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm a, b sao cho $A = B$

Theo định nghĩa trên giải được $a = 2, b = -1$.

2) Phép nhân một số với ma trận.

Cho $c \neq 0$ và ma trận $A = \left(a_{\text{ij}}\right)_{m\times n} \in M_{m\times n}(R)$. Khi đó : $cA = (ca_{ij})_{m\times n}$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó

$-2A = -2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ và $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

3) Phép cộng hai ma trận.

Cho $A = \left(a_{\text{ij}}\right)_{m\times n}$ và $B = \left(b_{\text{ij}}\right)_{m\times n}$. Tổng của A và B là ma trận $C = \left(c_{\text{ij}}\right)_{m\times n}$ được xác định như sau:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \left(\forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$$

Ví dụ. Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $A + B - 2C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Nhận xét. Phép cộng hai ma trận chỉ thực hiện được khi hai ma trận đó cùng cấp.

4) Phép nhân một dòng với một cột

Cho $A \in M_{1\times n}(R)$ và $B \in M_{n\times 1}(R)$

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Khi đó AB gọi là tích (vô hướng) của một dòng với một cột:

$$AB = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ thì : AB = (–1).3 + 2.(–2) + 0.6 + 7.2 = 7.

5) Phép nhân hai ma trận

Cho $A \in M_{m\times k}(R)$ và $B \in M_{k\times n}(R)$. Gọi A_1, A_2, ..., A_m là m dòng của A; $B^{(1)}, B^{(2)}, ..., B^{(n)}$ là n cột của B.

Ta viết:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} B^{(1)} & B^{(2)} & \dots & B^{(n)} \end{pmatrix}$$

Với $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \end{pmatrix}$ và $B^{(j)} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$.

Khi đó C = AB gọi là ma trận tích của A với B và phần tử c_{ij} của C được xác định như sau

$$c_{ij} = A_i B^{(j)} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

Nhận xét

Phép nhân hai ma trận AB chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận A là số dòng của ma trận B. Với $A \in M_{m\times k}(R)$ và $B \in M_{k\times n}(R)$ thì $C \in M_{m\times n}(R)$

Nói chung $AB \neq BA$. Trường hợp $AB = BA$ thì ta nói A và B là hai ma trận giao hoán.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Khi đó $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ta có: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$ và

$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận AB xác định bởi :

$c_{11} = A_1 B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1.1 + 2(-2) = -3$, tương tự

$c_{12} = 4, c_{13} = 3, c_{14} = 10, c_{21} = -3, c_{22} = -6, c_{23} = -9, c_{24} = -12$
$c_{31} = -6, c_{32} = 8, c_{33} = 6, c_{34} = 20$.

Vậy $AB = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 10 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \\ -6 & 8 & 6 & 20 \end{pmatrix}$

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Khi đó $AB = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 14 \\ 3 & -14 & -6 \end{pmatrix}$; BA không thực hiện được.

1.1.4 Các tính chất của các phép toán trên ma trận

Phép cộng hai ma trận có các tính chất sau:

Cho $A, B \in M_{m\times n}(R)$ và $\lambda, \mu \in R \setminus \{0\}$. Ta có :

1) $A + B = B + A$

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

3) $O_{m\times n} + A = A + O_{m\times n} = A$

4) $A + (-A) = O_{m\times n}$

5) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

7) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

8) $1A = A,\ 0.A = 0$

Phép nhân hai ma trận có các tính chất sau:

1) $A(B + C) = AB + AC$,

2) $A(BC) = (AB)C$,

3) $(AB)^t = B^t A^t$,

4) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

1.1.5 Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Các phép biến đổi biến ma trận A thành ma trận A’ sau được gọi là các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

Loại 1 : Đổi chỗ hai dòng cho nhau, ký hiệu :

$A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A'$

Loại 2 : Biến dòng i thành c lần dòng i $(c \neq 0)$, ký hiệu :

$A \xrightarrow{d_i \to cd_i} A'$

Loại 3 : Biến dòng i thành dòng i cộng c lần dòng j $(c \neq 0, i \neq j)$, ký hiệu :

$A \xrightarrow{d_i \to d_i + cd_j} A'$

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to 2d_2} A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 + 2d_1} A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_1} A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1.1.6 Ma trận bậc thang

1) Ma trận khác không $A \in M_{m \times n}(R), (m, n \geq 2)$ được gọi là ma trận bậc thang dòng, nếu có một số nguyên $r(0 < r \leq \min\{m, n\})$, và một dãy các chỉ số cột $1 \leq j_1, j_2, ..., j_r \leq n$, sao cho :

$i)$ $a_{ij} = 0$ nếu $r < i \leq m$ hoặc $\begin{cases} 1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq j_i \end{cases}$

$ii)$ $a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{rj_r} \neq 0$

Các phần tử $a_{1j_1}, a_{2j_2}, ... a_{rj_r}$ gọi là các phần tử được đánh dấu của A. Nếu ngoài $i)$ và $ii)$ còn có thêm:

$iii)$ $a_{1j_1} = a_{2j_2} = ... = a_{rj_r} = 1$

$iv)$ $a_{kj_i} = 0, 1 \leq k < i \leq r$

thì A được gọi là ma trận bậc thang dòng rút gọn.

Ví dụ. Các ma trận sau đây là ma trận bậc thang:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&6\\0&0&0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&4&5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

2) Ma trận khác không $B\in M_{m\times n}(R),(m,n\geq 2)$ được gọi là ma trận bậc thang cột (bậc thang cột rút gọn) nếu chuyển vị B^t của B là một ma trận bậc thang dòng (bậc thang dòng rút gọn).

1.1.7 Hạng của ma trận

Cho $A\in M_{m\times n}(R)$ và B là ma trận bậc thang nhận được từ A bằng một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp. Khi đó số dòng (số cột) khác không của B được gọi là hạng của A, kí hiệu là rank(A) hoặc r(A).

Ví dụ .Tìm hạng của ma trận $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-3&3&9\end{pmatrix}$.

Dùng phép biến đổi sơ cấp dòng đưa ma trận A về dạng bậc thang:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-3&3&9\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3\to d_3+3d_1]{d_2\to d_2-4d_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&9&18\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3\to d_3+3d_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}=A'$$

Ma trận bậc thang A’ có hai dòng khác 0 nên $rank(A)=2$

Nhận xét.

Ma trận bậc thang có các đặc điểm sau:

1) Phần tử khác 0 đầu tiên của dòng trên nằm về bên trái so với phần tử khác 0 đầu tiên của dòng dưới.

2) Dòng bằng 0 (nếu có) nằm phía dưới so với dòng khác 0.

Ta có thể dùng phép biến đổi sơ cấp dòng để đưa một ma trận bất kỳ về dạng bậc thang.

Ví dụ. Hãy đưa ma trận A về dạng bậc thang dòng và bậc thang dòng rút gọn

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\2&4&1&10\\3&6&-1&15\end{pmatrix}$$

Dùng phép biến đổi dòng đưa ma trận A về dạng bậc thang dòng như sau:

$$A \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - \frac{8}{7}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix} = B$$

$$B \xrightarrow[d_3 \to \frac{7}{5}d_3]{d_2 \to \frac{1}{7}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_1 \to d_1 - 4d_3]{d_2 \to d_2 - \frac{2}{7}d_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \to d_1 + 3d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

B là ma trận bậc thang của A, C là ma trận bậc thang rút gọn của A.

1.2 Định thức

1.2.1 Định thức cấp 2.

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_2 \in M_2(R)$, định thức cấp 2 của ma trận A được xác định và ký hiệu như sau

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ta có : $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 2\times(-3) = 7$.

1.2.2 Định thức cấp 3.

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_3 \in M_3(R)$. định thức cấp 3 của ma trận A được xác định và ký hiệu như sau :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

1.2.3 Định thức cấp n

Cho $A \in M_n(R)$, ta ký hiệu A(i,j) là ma trận có được từ A bằng cách bỏ dòng i và cột j .

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ thì $A(2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Phần phụ đại số của phần tử a_{ij} là một số được xác định và kí hiệu như sau:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i,j)$$

Cho $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(R)$. Định thức cấp n của ma trận A được định nghĩa là:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} A_{pj}$$ (khai triển theo dòng p) hoặc

$$\det A == \sum_{i=1}^{n} a_{iq} A_{iq}$$ (khai triển theo cột q).

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $\det A$.

Ta khai triển theo dòng 1 ta có :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Do đó $\det A = \sum_{j=1}^{4} a_{1j} A_{1j} = 1.(-3) + 1.0 + 2.3 + 2.0 = 3$

1.2.4 Các tính chất của định thức

Dựa vào định nghĩa của định thức ta suy ra được các tính chất sau:

1) Nếu đổi dòng thành cột, cột thành dòng thì định thức không thay đổi , tức là $\det A = \det A^t$

2) Nếu đổi chỗ hai dòng cho nhau thì định thức đổi dấu, tức là:

$$A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A' \Rightarrow \det(A) = -\det(A')$$

3) Từ một dòng (một cột) ta cộng vào một dòng khác (cột khác) sau khi nhân một số $c \neq 0$ thì định thức không đổi

$$A \xrightarrow{d_i \to d_i + cd_j} A' \text{ khi đó } \det(A') = \det(A).$$

4) Ta có thể đưa thừa số chung $c \neq 0$ ra ngoài định thức, tức là:

$$A \xrightarrow{d_i \to cd_i} A' \text{ khi đó } \det(A') = c\det(A).$$

5) Cho $A \in M_n(R)$, nếu mỗi phần tử trên dòng (cột) của A là tổng của hai phần tử thì định thức của A tách ra được thành tổng của hai định thức.

Ví dụ. $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$ hoặc $\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$

6) Cho $A, B \in M_n(R)$ khi đó $\det AB = \det A \det B$.

Nhận xét.

1) Dựa vào các tính chất trên, ta có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp dòng để tính định thức cấp n.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Khi đó :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 + h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

2) Cho $A = \left(a_{\text{ij}}\right)_{m \times n}$. Hạng của ma trận là cấp cao nhất của định thức con khác 0.

3) Cho $A = \left(a_{\text{ij}}\right)_n$ là ma trận vuông cấp n. Khi đó $rank(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -3 & 3 & m \end{pmatrix}$. Tìm hạng của ma trận A theo m.

Ta có $\det A = m - 9$. Nếu $m = 9$ thì $rank(A) = 2$; nếu $m \neq 9$ thì $rank(A) = 3$.

1.3 Ma trận nghịch đảo

1.3.1 Định nghĩa

Cho ma trận $A \in M_n(R)$. Ta nói ma trận A khả nghịch nếu $\exists B \in M_n(R)$ thoả mãn:

$$BA = AB = I_n$$

Ta nói B (tồn tại duy nhất) là ma trận nghịch đảo của A. Ký hiệu $B = A^{-1}$

1.3.2 Định lí

Cho $A \in M_n(R)$. Khi đó A khả nghịch nếu và chỉ nếu $\det A \neq 0$

1.3.3 Tính chất

Nếu $A, B \in M_n(R)$ là hai ma trận khả nghịch thì :

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

4) $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$

5) Nếu A khả nghịch thì $\det A^{-1} = \left(\det A\right)^{-1}$

1.3.4 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp

Người ta chứng minh được kết quả sau: Cho $A \in M_n(R)$ là ma trận khả nghịch. Khi đó những phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào biến A thành I_n thì chúng cũng biến I_n (theo thứ tự đó) thành A^{-1}.

Từ đó ta có phương pháp tìm ma trận nghịch đảo như sau:

Để tìm ma trận A^{-1} với

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta lập ma trận

$$\left(A\middle|I_n\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Dùng phép biến đổi sơ cấp dòng đối với $\left(A\middle|I_n\right)$ để biến A thành I_n khi đó I_n biến thành A^{-1}.

Ví dụ. Tìm A^{-1} với $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Ta có :

$$\left(A\middle|I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{d_2 \to d_2 - d_1 \\ d_2 \to d_2 - d_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_1 \to d_1 - 3d_2]{d_1 \to d_1 - 2d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(I_3 \middle| A^{-1}\right).$$

Vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3.5 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo nhờ định thức

Ta gọi ma trận phụ hợp P_A của ma trận A là ma trận được xác định như sau:

$$\left(P_A\right)_{\text{ij}} = A_{ji};\ \forall i, j = \overline{1, n}$$

Để tìm A^{-1} ta thực hiện hai bước

Bước 1. Tính $D = \det A$

Nếu $\det A = 0$ thì A không khả nghịch

Nếu $\det A \neq 0$ thì A khả nghịch, chuyển sang bước 2.

Bước 2. Lập ma trận phụ hợp P_A. Khi đó: $A^{-1} = \dfrac{1}{D} P_A$.

Ví dụ. Dùng phương pháp định thức tìm A^{-1} của $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Ta có: $D = \det A = 1$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1;\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3; A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2; A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

Khi đó: $A^{-1} = \dfrac{1}{D} P_A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Trong chương này chúng ta đã làm quen một đối tượng mới là ma trận, và các vấn đề xoay quanh ma trận. Trong Toán học có những vấn đề dẫn đến việc giải hệ phương trình, và để giải hệ phương trình đó đã nảy sinh ra khái niệm mới là ma trận. Để thấy rõ điều đó ta sẽ nghiên cứu chương tiếp theo là Hệ phương trình tuyến tính.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1 Thực hiện các phép toán trên ma trận

$a)\ \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\0\\-5\end{pmatrix}$ $\qquad b)\ \begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\5 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\4 & 2 & 3\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix}3 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad d)\ \begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\3 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$

e) Cho $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\5 & 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\4 & 2 & 3\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & -1\\7 & 2\\1 & 6\end{pmatrix}$.

Tính $3A+2B^T$, AB, AB-BA, BC, ABC, BA-3C+I_3

f) Cho $f(x)=2x^2+3x-1,\ g(x)=x^2+2x-\dfrac{3}{x},\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{pmatrix}$. Tính $f(A), g(A)$.

g) Cho $A=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}a & 1\\0 & a\end{pmatrix}$. Tính $A^n,\ B^{10},\ C^{2011}$

1.2 Cho $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 1 & 1\\3 & 2 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\4 & 2 & 3\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}, B^{-1} (nếu có) bằng 2 phương pháp đã học.

1.3 Tính các định thức sau:

$a)\ \begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix}$ $\qquad b)\ \begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\0 & 2 & 2\\1 & 3 & m\end{vmatrix}$ $\qquad c)\ \begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 1 & 1\\3 & 2 & 2\end{vmatrix},$ $\qquad d)\ B=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\4 & 2 & 3\\-2 & 0 & 1\end{vmatrix}$

$e)\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 1\\3 & 4 & 1 & 2\\4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ $\qquad f)\ \begin{vmatrix}0 & a & b & c\\a & 0 & c & b\\b & b & 0 & a\\c & c & a & 0\end{vmatrix}$ $\qquad g)\ \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$

1.4 Giải các phương trình sau:

$$a)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ -3 & 7-\lambda & -5 \\ 2 & -5 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad b)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$c)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad d)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

1.5 Tìm hạng của các ma trận sau:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \\ 10 & 2 & 4 & 15 \end{pmatrix} \qquad d) D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

CHƯƠNG 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.1 Hệ phương trình tuyến tính

2.1.1 Hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

Hệ phương trình gồm m phương trình n ẩn có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.1)$$

được gọi là hệ phương trình tuyến tính tổng quát.Trong đó $a_{ij}, b_i \in R$, $x_1, x_2, ..., x_n$ là các ẩn số. Ta đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gọi là ma trận hệ số của (3.1)

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$: cột hệ số tự do, $$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$: cột ẩn số.

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ gọi là ma trận bổ sung (mở rộng) của hệ (3.1).

Với cách đặt như trên hệ (3.1) được viết lại : $AX=B$

Khi B=0 hệ (3.1) được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Ngược lại ta gọi là hệ không thuần nhất .

2.1.2 Nghiệm của hệ phương trình

Nghiệm của hệ (3.1) là bộ số $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ sao cho $AC=B$. Quá trình đi tìm tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính gọi là giải hệ phương trình tuyến tính.

Hai hệ phương trình tuyến tính có cùng số ẩn (số phương trình có thể khác nhau) gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập hợp nghiệm.

Ví dụ. Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=1 \\ x_1+4x_2+2x_3=2 \\ x_1+3x_2+3x_3=3 \end{cases} \quad (1)$$

Ma trận hệ số của hệ phương trình tuyến tính là:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ma trận nghịch đảo của A (đã có được từ ví dụ trước) là

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hệ (1) $\Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$.

Ví dụ. Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = m \end{cases}$$

Hệ phương trình tương đương $A^t X = C \Leftrightarrow X = \left(A^t\right)^{-1} C$

$$\Leftrightarrow X = \left(A^{-1}\right)^t C = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-m \\ 0 \\ -2+m \end{pmatrix}$$

2.2 Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

2.2.1 Phương pháp Cramer để giải hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính (3.1) được gọi là hệ Cramer nếu $m = n$ và $\det A \neq 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3.2)$$

Đặt $D = \det(A)$ và D_j $(j = \overline{1,n})$ là định thức có được bằng cách thay cột j của D bởi cột tự do. Khi đó hệ phương trình Cramer có nghiệm duy nhất xác định theo công thức:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ ...,\ x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$.

Ta có : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \det(A) = 11 \neq 0$,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -8,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -7,\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 26.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $x_1 = -\frac{8}{11},\ x_2 = -\frac{7}{11},\ x_3 = \frac{26}{11}$.

2.2.2 Định lý Kronecker – Capelli

Hệ (3.1) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(A|B)$. Hơn nữa

i) $r(A) = r(A|B) = n$: hệ (3.1) có nghiệm duy nhất.

ii) $r(A) = r(A|B) < n$: hệ (3.1) có vô số nghiệm phụ thuộc $(n-r)$ tham số.

iii) $r(A) < r(A|B)$: hệ (3.1) vô nghiệm.

2.2.3 Định lý

Cho hai hệ phương trình tuyến tính có cùng m phương trình và n ẩn số với ma trận mở rộng lần lượt là $(A|B);(A^{'}|B^{'}),\ (m \geq 2)$. Khi đó nếu $(A^{'}|B^{'})$ nhận được từ $(A|B)$ bởi một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp dòng thì hai hệ phương trình tuyến tính đã cho tương đương nhau.

Từ hai định lí trên ta đi đến phương pháp sau:

2.2.4 Phương pháp Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính

Để giải hệ (3.1) ta thực hiện các bước:

Bước 1: Lập ma trận mở rộng của A:

$$\left(A|B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Bước 2: Dùng các phép biến đổi sơ cấp dòng đưa ma trận $(A|B)$ về ma trận $(A^{'}|B^{'})$, trong đó $A^{'}$ là ma trận bậc thang (rút gọn). Dựa vào Định lý Kronecker – Capelli để kết luận nghiệm.

Ví dụ. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$.

Ma trận hoá hệ phương trình trên ta thu được :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ -1 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm duy nhất là : $x_1 = -40,\ x_2 = 15,\ x_3 = 11$

Ví dụ . Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

Ta có

$$\left(A\middle|B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Suy ra : $r(A|B) = 3$. Mà $r(A) = 2 < r(A|B)$. Vậy hệ vô nghiệm.

Ví dụ . Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}.$$

Ta có : $\left(A\middle|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right).$

Suy ra : $r(A) = r(A|B) = 2 < n = 3$, vậy hệ có vô số nghiệm.

Ta viết hệ thành

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 1 \\ x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 4x_3 \\ x_2 = 5x_3 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của hệ có dạng

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 4t \\ x_2 = 5t \quad (t \in R) \\ x_3 = t \end{cases}.$$

Như vậy việc giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Crammer đòi hỏi hệ phương trình tuyến tính có số phương trình và số ẩn bằng nhau, ma trận hệ số phải là ma trận khả nghịch trong khi đó phương pháp Gauss lại cho phép ta giải một hệ bất kỳ. Thực chất phương pháp Gauss là phương pháp cộng mà trước đây ta đã học nhưng trong qúa trình giải chỉ có hệ số thay đổi chứ các ẩn số vẫn giữ nguyên nên ta quan tâm đến những hệ số và được viết thành ma trận.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

2.1 Giải các hệ phương trình tuyến tính sau:

$$a)\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=3 \\ x_1-x_2-x_3=1 \\ x_1+x_3=-2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=1 \\ 3x_1+2x_2+6x_3=-5 \\ -x_1+x_2+7x_3=3 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 2x+y+z-2t=1 \\ x+3y-2z+t=-1 \\ -2x+y+z+5t=0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x+2y-3z+2t=1 \\ 4x+y+3z-2t=2 \\ 16x+9y+z-3t=-3 \\ x+4y+7t-7z=4 \end{cases}$$

2.2 Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}, rồi giải các hệ phương trình sau:

$$a)\begin{cases} x-z=1 \\ x+y+z=2 \\ -x+2y+2z=-5 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+2z=m+1 \\ -x+y+2z=2 \end{cases} \quad c)\begin{cases} -x+z=1 \\ x+y+z=2 \\ 2x+2y-z=-5 \end{cases}$$

2.3 Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính sau:

$$a)\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 2x+y+mz=2 \\ x+my+3z=-4 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+y+z=m+1 \\ x-3y+2z=2 \end{cases} \quad c)\begin{cases} -x+3y+z=3 \\ 2x+6y-2z=m \\ -2x+2y-z=2m-1 \end{cases}$$

2.4 Trong một ngày, khẩu phần ăn của mỗi người cần có 80g Protit, 50g Lipit, 450g Gluxit. Hàm lượng các chất trên có trong 1g thức ăn A và B như sau:

Chất dinh dưỡng	Thức ăn	
	A	B
Protit (g)	0,1	0,2
Lipit (g)	0,2	0,3
Gluxit (g)	0,6	0,4

Hãy lập phương trình ma trận cho bài toán trên. Hãy cho biết các ẩn số trong phương trình ma trận trên cho biết điều gì?

CHƯƠNG 3. KHÔNG GIAN VECTƠ

3.1 Không gian Véc-tơ

3.1.1 Định nghĩa

Tập hợp $V \neq \varnothing$ được gọi là một không gian vectơ trên R nếu ta định nghĩa hai phép toán cộng (+) và nhân vô hướng (**.**) trên V thỏa 10 tiên đề sau:

$\forall u, v, w \in V; \forall \alpha, \beta \in R$

1) $u, v \in V,\ u + v \in V$

2) $u + v = v + u$

3) $(u+v)+w = u+(v+w)$

4) $\exists 0 \in V,\ u + 0 = 0 + u = u$

5) $\forall u \in V, \exists(-u) : u + (-u) = 0$

1’) $u \in V, \alpha \in R,\ \alpha u \in V$

2’) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u = \beta(\alpha u)$

3’) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

4’) $\alpha\left(u+v\right) = \alpha u + \alpha v$.

5’) $1u = u$

3.1.2 Các Ví dụ về không gian Véc-tơ

1) R^3 với phép cộng vectơ và phép nhân một số thực với một vectơ là không gian vectơ trên R

2) Tập hợp $M_{m\times n}(R)$ gồm tất cả các ma trận cấp $m \times n$ trên R cùng với phép cộng các ma trận và phép nhân một số với một ma trận tạo thành một không gian vectơ.

3) Tập hợp $P_2\left[x\right]$ gồm các đa thức bậc không quá 2 cùng với phép cộng hai đa thức thông thường và phép nhân một số với đa thức là một không gian véctơ trên R.

3.1.3 Tính chất.

Từ các tiên đề trên ta suy ra được vài tính chất sau của không gian Véc-tơ:

1) $\alpha 0 = 0$

2) $0u = 0$

3) $(-1)u = -u$

4) $\alpha u = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee u = 0$

$\alpha u = \beta u, u \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

$\alpha u = \alpha v, \alpha \neq 0 \Rightarrow u = v$

5) Vectơ 0 và vectơ đối (-u) của u tồn tại duy nhất.

6) $\forall u, v, w \in V : u + w = v + w \Rightarrow u = v$

3.2 Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

3.2.1 Tổ hợp tuyến tính

Cho V là không gian vectơ trên **R** và các vectơ $u, u_1, ..., u_n \in V$. Ta nói u là tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ $\{u_1, ..., u_n\}$ khi và chỉ khi tồn tại $\alpha_1, ..., \alpha_n \in R$ sao cho

$$u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n .$$

Ta cũng nói u biểu thị tuyến tính được qua hệ vectơ $\{u_1, ..., u_n\}$

Ví dụ. Trong R^3, xét các vectơ $u = (2,3,1)$, $u_1 = (2,1,3)$, $u_2 = (-2,0,0)$, $u_3 = (1,1,-1)$. Khi đó: $u = u_1 + u_2 + 2u_3$ nên u là tổ hợp tuyến tính của các vectơ u_1, u_2, u_3.

Ví dụ. Trong R^2 xét các vectơ $u_1 = (-1,0)$, $u_2 = (0,-1)$, $u_3 = (1,1)$. Khi đó:

vec tơ $0 = (0,0)$ có ít nhất hai cách biểu thị tuyến tính được qua hệ vectơ $\{u_1, u_2, u_3\}$

$0 = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3$; $0 = 1u_1 + 1u_2 + 1u_3$.

Tổ hợp tuyến tính $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$ của hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ gọi là tầm thường nếu $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Ngược lại, nếu tồn tại $\alpha_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$ thì tổ hợp tuyến tính $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ gọi là không tầm thường.

3.2.2 Phụ thuộc tuyến tính

Hệ vectơ $\{u_1, ..., u_n\}$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại $\{\alpha_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset R$ thỏa $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$ sao cho $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0$

Ví dụ.

Trong R^3 xét các vectơ $u_1 = (1,1,2)$, $u_2 = (-2,0,1)$, $u_3 = (1,-1,-3)$. Khi đó $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ nên hệ các vectơ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

Tập hợp $\emptyset \neq S \subset V$ được gọi là tập phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại hệ các vectơ $\{u_1, ..., u_n\} \subset S$ sao cho hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ. Trong R^3 tập $S = \{u_1 = (1,1,2), u_2 = (-2,0,1), u_3 = (1,-1,-3), u_4 = (1,5,-3)\}$ phụ thuộc tuyến tính vì hệ vectơ $\{u_1, u_2, u_3\} \subseteq S$ và $\{u_1, u_2, u_3\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

3.2.3 Độc lập tuyến tính

Hệ vectơ $\{u_1,...,u_n\}$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0$ thì $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Ví dụ. Hệ $u_1 = (1,1,2),\ u_2 = (1,-1,-1),\ u_3 = (2,1,1)$ là độc lập tuyến tính vì từ $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$ ta suy ra $x = y = z = 0$.

Tập hợp $\varnothing \neq S \subset V$ được gọi là tập độc lập tuyến tính nếu với mọi hệ các vectơ $\{u_1,...,u_n\} \subset S$ thì $\{u_1,...,u_n\}$ là hệ các vectơ độc lập tuyến tính.

3.2.4 Các tính chất.

1) Mọi hệ chứa vectơ 0 đều phụ thuộc tuyến tính.

2) Mọi hệ chứa một hệ con phụ thuộc tuyến tính thì phụ thuộc tuyến tính.

3) Tập hợp $S = \{u_1,...,u_n\}$ là phụ thuộc tuyến tính khi $\exists u_i \in S$ sao cho u_i là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại trong S.

4) Mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính thì độc lập tuyến tính.

5) Tập hợp $S = \{u_1,...,u_n\}$ là độc lập tuyến tính nếu mọi u_i không là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại trong S.

6) Tập hợp $\varnothing \neq S \subset V$ hoặc là tập độc lập tuyến tính hoặc phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ. Cho các vectơ $u_1 = (-2,1,-1),\ u_2 = (1,-1,-1)$, $u_3 = (-1,0,-2)$. Ta có $u_1 + u_2 = u_3$ nên hệ các vectơ $\{u_1, u_2, u_3\}$ phụ thuộc tuyến tính.

3.2.5 Định lý.

Trong không gian R^n cho hệ m vectơ

$$\left\{u_1 = \left(a_{11}, a_{12},..., a_{1n}\right), u_2 = \left(a_{21}, a_{22},..., a_{2n}\right),..., u_m = \left(a_{m1}, a_{m2},..., a_{mn}\right)\right\}$$

Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Khi đó $\left\{u_1,...,u_m\right\}$ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $rank(A) = m$.

Trong trường hợp $m = n$ thì $\left\{u_1,...,u_m\right\}$ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $rank(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Ví dụ. Cho các vectơ $u_1 = (-2,1,-1,1)$, $u_2 = (1,-1,-1,2)$, $u_3 = (-1,0,-2,1)$. Khi đó ta có ma trận

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ có $r(A) = 3$ nên hệ các vectơ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Xét hệ vectơ $u_1 = (2,1,-1)$, $u_2 = (1,1,-1)$, $u_3 = (3,2,-2)$. Khi đó ma trận

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ có $\det A = 0$ nên họ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

3.3 Không gian Vectơ con

3.3.1 Định nghĩa.

Cho V là không gian vectơ trên R và $\varnothing \neq W \subset V$. W được gọi là không gian con của V nếu W cũng là không gian vectơ trên R với các phép toán cộng và nhân như trên V. Ký hiệu $W \leq V$.

Định lý sau cho ta điều kiện cần và đủ để tập W là không gian con của V

3.3.2 Định lý

Cho V là không gian vectơ trên R và $\varnothing \neq W \subset V$. W là không gian con của V khi và chỉ khi $\forall u, v \in W, \alpha \in R$: $u + v \in W$ và $\alpha u \in W$.

Ví dụ. Xét $W = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 = 0\} \subset R^3$. Khi đó W là không gian con của R^3.

Thật vậy $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in R^3$ sao cho $x_1 = y_1 = 0$. Ta có

$x_1 + y_1 = 0 \Rightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathrm{W}$,

$\alpha x_1 = 0 \Rightarrow \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in R^3$.

3.3.3 Tập sinh – không gian vectơ sinh bởi một tập hợp.

Cho V là không gian vectơ trên R và $\{u_1, ..., u_n\} \subset V$. Gọi S là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của $\{u_1, ..., u_n\}$. Khi đó S là một không gian con của V, ta nói S là không gian con của V sinh bởi $\{u_1, ..., u_n\}$. Ký hiệu là: $S = \langle u_1, ..., u_n \rangle$

Quy ước $\langle \varnothing \rangle = \{0\}$. Nếu $\langle S \rangle = V$ thì ta nói S sinh ra V hay S là tập sinh của V.

3.3.4 Định lý

Cho $U = \{u_1, ..., u_n\}$ là một hệ hữu hạn các vectơ thuộc V và U’ là hệ vectơ nhận được từ U sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp. Khi đó ta có $\langle U \rangle = \langle U' \rangle$.

Ví dụ. Tìm $\langle (1,1,1);(2,3,4)(4,5,6)\rangle$

Ta lập ma trận dòng từ ba vectơ trên

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&5&6\end{pmatrix}$$

Dùng phép biến đổi sơ cấp dòng đưa A về ma trận bậc thang:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3\to d_3-4d_1]{d_2\to d_2-2d_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3\to d_3-d_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Vậy $\langle (1,1,1);(2,3,4)(4,5,6)\rangle=\langle (1,1,1);(0,1,2)\rangle$

3.4 Cơ sở- số chiều- tọa độ

3.4.1 Cơ sở, số chiều của không gian véctơ

Cho V là không gian vectơ V . Tập $\varnothing\neq B\subset V$ được gọi là cơ sở của V nếu B độc lập tuyến tính và sinh ra V .

Khi đó số vectơ của B được gọi là số chiều của V . Ký hiệu là dimV.

Ví dụ. Trong không gian vectơ R^3, hệ vectơ $B=\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ độc lập tuyến tính đồng thời B sinh ra V nên $B=\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ là cơ sở của R^3 và được gọi là cơ sở chính tắc của R^3.

3.4.2 Định lý

Cho V là không gian vectơ trên R và $B=\{u_1,...,u_n\}$ là cơ sở của V, $B'\subseteq V$. Khi đó:

i) Nếu B’ có nhiều hơn n vectơ thì B’ phụ thuộc tuyến tính nên B’ không là cơ sở của V.

ii) Nếu B’ có ít hơn n vectơ thì B’ không sinh ra V nên B’ không là cơ sở của V.

iii) Nếu B’ có đúng n vectơ thì B’ là cơ sở của V $\Leftrightarrow$ B’ sinh ra V $\Leftrightarrow$ B’ độc lập tuyến tính.

3.4.3 Định lý

Trong không gian vectơ hữu hạn chiều mọi họ vectơ độc lập tuyến tính đều có thể bổ sung thành cơ sở

Ví dụ. Cho $S=\langle (1,1,1);(2,3,4)(4,5,6)\rangle$. Tìm dim *S*.

Ta có $S = \langle (1,1,1);(2,3,4)(4,5,6) \rangle = \langle (1,1,1);(0,1,2) \rangle$ và $\{(1,1,1);(0,1,2)\}$ độc lập tuyến tính nên $\{(1,1,1);(0,1,2)\}$ cũng là cơ sở của *S*. Vậy dim *S*=2

3.4.4 Tọa độ của véc tơ trong cơ sở

Một cơ sở được gọi là cơ sở được sắp của không gian vectơ V là cơ sở mà ta quan tâm đến thứ tự của các vectơ trong đó.

Ví dụ. $B = \{(1,0),(0,1)\}$ là cơ sở được sắp của không gian vectơ R^2.

Dễ dàng thấy rằng đối với không gian vectơ n chiều thì có n! cơ sở được sắp. Khi nói đến cơ sở mà không nói rõ là cơ sở được sắp thì ta hiểu đó là cơ sở được sắp theo thứ tự mà ta viết trong cơ sở đó.

Nếu $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ là cơ sở được sắp của không gian vectơ V trên R và $u \in V$. Khi đó ta có mọi vectơ $u \in V$ đều được viết duy nhất dưới dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n.$$

Ký hiệu là:

$$[\mathrm{u}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

và gọi là tọa độ của vectơ u trong cơ sở B.

Ví dụ. Cho các vectơ $u = (1,2,3), u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1) \in R^3$. Khi đó

$$B = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,0,1)\}$$

là cơ sở của R^3 và ta có $u = 0u_1 + 2u_2 + u_3$ nên

$$[\mathrm{u}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cho B là cơ sở của không gian vectơ hữu hạn chiều trên R. Khi đó:

$\forall \alpha \in R$, $\forall u, v \in V$, ta có $[\alpha u + v]_B = \alpha [u]_B + [v]_B$ (Sinh viên tự kiểm tra như bài tập)

3.4.5 Ma trận chuyển cơ sở

Giả sử $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ và $B' = \{u'_1, u'_2, ..., u'_n\}$ là 2 cơ sở được sắp của không gian vectơ V. Ma trận $P = \left([u_1']_B \quad [u_2']_B \quad ... \quad [u_n']_B \right)$ được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B' và ta ký hiệu là $P(B \to B')$

Ví dụ. Cho

$B=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$

$B'=\{u_1=(1,1,0), u_2=(0,1,1), u_3=(1,0,1)\}$

là hai cơ sở của R^3.

Ta có

$[\mathrm{u}_1]_B=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix};[\mathrm{u}_2]_B=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix};[\mathrm{u}_3]_B=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ nên $P(B\to B')=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

3.4.6 Định lý

Cho A, B, C là các cơ sở được sắp của không gian vectơ V có số chiều n. Khi đó:

i) Ma trận chuyển cơ sở từ A sang B là duy nhất.

ii) $P(A\to A)=I_n$

iii) $P(A\to B)^{-1}=P(B\to A)$

iv) $P(A\to B)P(B\to C)=P(A\to C)$

3.4.7 Định lý (công thức đổi tọa độ)

Cho $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ và $B'=\{u'_1,u'_2,...,u'_n\}$ là 2 cơ sở được sắp của không gian vectơ V, $P(B\to B')$ là ma trận đổi cơ sở từ B sang B' , $u\in V$. Khi đó:

$$[u]_B=P(B\to B')[u]_{B'}$$

Hay

$$[u]_{B'}=P(B\to B')^{-1}[u]_B$$

Ví dụ.

Trong R^3 cho hai cơ sở $B=\{u_1=(1,1,1), u_2=(1,1,2), u_3=(1,2,3)\}$ và

$B'=\{u'_1=(2,1,-1), u'_2=(3,2,5), u'_3=(1,-1,1)\}$.

Khi đó $[u'_1]_B=\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\end{bmatrix};[\mathrm{u}'_2]_B=\begin{bmatrix}0\\4\\-1\end{bmatrix};[\mathrm{u}'_3]_B=\begin{bmatrix}-1\\4\\-2\end{bmatrix}$. Vậy $P(B\to B')=\begin{pmatrix}4&0&-1\\-1&4&4\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$.

Áp dụng công thức trên ta được :

$$[u]_B=P(B\to B')[u]_{B'}=\begin{pmatrix}4&0&-1\\-1&4&4\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1. Trong tập $V = \{ (x, y, z) : x \in R, y \in R, z \in R \text{ và } x + y + z = 0 \}$, xét phép cộng và nhân như sau $\forall u = (x_1, x_2, x_3) \in V$; $\forall v = (y_1, y_2, y_3) \in V$, $\alpha \in R$

Phép cộng ”+”: $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

Phép nhân ”.”: $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

a) Tập V với phép cộng và phép nhân như trên có không gian vectơ trên R không? Tại sao?

b) Tập V có là không gian con của R^3 không? Tại sao?

3.2. Trong các trường hợp sau đây xét xem W có không gian con của không gian vectơ R^3 (R^3 là không gian vectơ trên R):

$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 \geq 0 \right\}$

$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 + 2x_2 = x_3 \right\}$

$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 = x_2 = 0 \right\}$

3.3 Trong các trường hợp sau đây, hãy xác định tham số *m* để vectơ *x* là tổ hợp tuyến tính của các vectơ *u, v, w.*

Trong R^3: *u = (1,4,2); v = (6,0,7); w = (5,6,m); x = (1,3,5)*

Trong R^3: *u = (1,4,3); v = (2,2,1); w = (4,1,6); x = (5,0,m).*

Trong R^3: *u = (1,3,2); v = (2,-1,1); w = (3,-4,3); x = (1,m,5).*

Trong R^4: *u = (1,0,-3,2); v = (4,1,3,-2); w = (16,9,1-3); x = (m,4,-1,1).*

3.4 Gọi W là không gian con của R^4 sinh ra bởi các vectơ: $u_1 = (2, -1, 3, 2)$, $u_2 = (-1, 1, 1, -3)$, $u_3 = (1, 1, 9, -5)$. Hỏi vectơ $u = (3, -1, 0, -1)$ có thuộc không gian con của W không?

3.5 Cho *x, y, z* là ba vectơ độc lập tuyến tính trong không gian vectơ V. Xét tính độc lập tuyến tính,phụ thuộc tuyến tính của họ các véc tơ sau:

$S = \{ u = x - 2z, v = x - y - z, w = x + x + z \}$

$S = \{ u = x + y, v = y + z, w = z + x \}$

3.6 Xét tính độc lập tuyến tính,phụ thuộc tuyến tính của các tập vectơ sau:

$M = \left\{ (-1, 2, 0), (3, -6, 2) \right\}$ trong R^3

$M = \left\{ (1, -2, 6), (6, -3, 0) \right\}$ trong R^3

$M = \left\{ (2, -3, m), (3, 2, -5), (1, -4, 3) \right\}$ trong R^3

$M=\{(4,-5,2,0),(2,-2,1,0),(0,-3,3,9),(4,0,5,6)\}$ trong R^4

$M=\{(1,0,1,1),(0.1.1.1),(1,1,0,1),(1,1,1,m)\}$ trong R^4

3.7 Trong không gian R^4 cho các tập:

$W_1=\{\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4 : x_1+x_2=x_3, x_1-x_2+x_3=2x_4\ \}$

$W_2=\{\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4 : x_1=x_2=x_3\}$

$W_3=\{\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4 : x_1=x_2=0\}$

a) Chứng minh rằng W_1, W_2, W_3 là các không gian con của R^4

b) Tìm một cơ sở của W_1, W_2, W_3

3.8 Trong các tập vectơ sau, xét xem tập nào cơ sở của R^3:

$M=\{\ u_1=(1,2,1), u_2=(1,0,5)\ \}$

$M=\{\ u_1=(1,-2,3), u_2=(1,1,-1), u_3=(3,4,2), u_4=(6,2,1)\ \}$

$M=\{\ u_1=(0,2,3), u_2=(2,-3,4), u_3=(3,4,-5)\ \}$

$M=\{\ u_1=(1,1,2), u_2=(1,2,1), u_3=(3,2,2)\ \}$

3.9 Trong R^4 cho tập $B=\{\ (1,2,-1,-2),(2,0,0,1),(1,3,1,-4),(1,3,-1,0)\ \}$.

a) Chứng minh rằng *B* là cơ sở của R^4

b) Tìm tọa độ vectơ $x=(1,2,-1,2)$ đối với cơ sở *B*.

b) Xác định ma trận chuyển cơ sở từ *B* sang cơ sở chính tắc của R^4

Xác định ma trận chuyển cơ sở từ *B* sang cơ sở $B'=\{\ (1,1,0,0),\ (1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\ \}$ và tìm $[x]_{B'}$.

3.10 Trong không gian R^3, cho:

$B=\{\ v_1=(1,0,1), v_2=(1,2,2), v_3=(0,-1,-1)\ \}$,

$E=\{\ u_1=(1,0,-1), u_2=(1,1,1), u_3=(-1,2,2)\ \}$

a) Chứng minh *B, E* là các cơ sở của R^3.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ *B* sang *E*. Cho *u = (1,2,3)* , tìm $[u]_B$, $[u]_E$

c) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ *E* sang *B*. Cho $[v]_B=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$, tìm *v*, $[v]_E$

3.11 Cho $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ là một cơ sở của R^3 và các vectơ v_1,v_2,v_3 có tọa độ đối với cơ sở *B* lần lượt là: $[v_1]_B=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $[v_2]_B=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$, $[v_3]_B=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$.

a) Chứng minh $E=\{v_1,v_2,v_3\}$ là cơ sở của R^3. Tìm v_1,v_2,v_3 theo u_1,u_2,u_3.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ *E* sang *B*.

CHƯƠNG 4. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

4.1 Ánh xạ tuyến tính

4.1.1 Định nghĩa

Cho V và U là hai không gian vectơ trên trường K. Ánh xạ $f:V\to U$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu thỏa mãn hai điều kiện :

$$i)\ f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta) \text{ với } \forall\alpha,\beta\in V$$
$$ii)\ f(a.\alpha)=a.f(\alpha),\ \forall a\in\mathbb{R},\alpha\in V$$

Ta có thể viết lại thành :

$$f(a\alpha+\beta)=a.f(\alpha)+f(\beta) \text{ với } \forall a\in\mathbb{R},\forall\alpha,\beta\in V$$

Một ánh xạ tuyến tính $f:V\to V$ gọi là một phép biến đổi tuyến tính của V.

Ví dụ.

1) Ánh xạ không : $0:V\to U,\alpha\mapsto 0(\alpha)=0$ là ánh xạ tuyến tính

2) Ánh xạ đồng nhất : $id:V\to V,\ \alpha\mapsto id(\alpha)=\alpha$ là một ánh xạ tuyến tính và cũng là một phép biến đổi tuyến tính của V

3) Ánh xạ đạo hàm : $\varphi:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x],\ f(x)\mapsto\varphi(f)=f'(x)$ là một ánh xạ tuyến tính

4) Phép chiếu $p:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ (x_1,x_2,x_3)\mapsto p(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2)$ là ánh xạ tuyến tính

5) Ánh xạ : $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ với $T(x_1,x_2,x_3)=(4x_2^2+x_3^2,x_1^2-x_2x_3)$ không phải là ánh xạ tuyến tính.

Thật vậy, lấy vectơ $u=(x_1,x_2,x_3)$. Khi đó:

$$T(cu)=T(cx_1,cx_2,cx_3)$$
$$=(4c^2x_2^2+c^2x_3^2,c^2x_1^2-c^2x_2x_3)=c^2(4x_2^2+x_3^2,x_1^2-x_2x_3)=c^2T(u)\neq cT(u)$$

4.1.2 Các tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính

Cho U,V là các không gian vectơ và $f:V\to U$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó :

1) $f(0_V)=0_U$ do : $f(-\alpha)=f(\alpha)$ với mọi $\alpha \in V$

2) Với mọi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in V$:

$f(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n) = a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + ... + a_n f(\alpha_n)$

3) Ánh xạ tuyên tính biến hệ phụ thuộc tuyến tính thành hệ phụ thuộc tuyến tính. Tức là nếu $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là hệ phụ thuộc tuyến tính trong V thì $f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n)$ là hệ phụ thuộc tuyến tính trong U

4) Ánh xạ tuyến tính không làm tăng hạng của một hệ vectơ, nghĩa là với mọi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in V$ ta luôn có : $rank\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n)\} \le rank\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$

Ta chứng minh 3) và 4)

3) Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_3 \in V$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng không sao cho $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = 0$. Do đó

$$f(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n) = f(0).$$

Suy ra $a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + ... + a_n f(\alpha_n) = 0$ mà $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng không nên $f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n)$ là hệ phụ thuộc tuyến tính trong U

4) Giả sử $f(\alpha_{i_1}), ..., f(\alpha_{i_k})$ là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\{f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)\}$ thì $rank\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n)\} = k$ nên theo tính chất 3), hệ $\alpha_{i_1}, ...\alpha_{i_k}$ độc lập tuyến tính

Do đó hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ có không ít hơn k vectơ, tức là $rank\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \ge rank\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_n)\}$.

4.1.3 Định lý cơ bản về sự xác định của ánh xạ tuyến tính

Cho V là không gian vectơ n chiều ($\dim V = n$) và $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ là cơ sở tùy ý của V, U là không gian vectơ tùy ý và $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ là hệ vectơ tùy ý của U. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f: V \to U$ thỏa mãn $f(\alpha_i) = \beta_i, \forall i = \overline{1,n}$

Chứng minh.

Tính tồn tại:

Với mỗi $x \in V$ thì tồn tại $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ sao cho: $x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n$, ta định nghĩa ánh xạ : $f: V \to U$ như sau : $f(x) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + ... + a_n\beta_n$ thì f là ánh xạ tuyến tính thỏa mãn điều kiện của định lý.

Tính duy nhất :

Giả sử có hai ánh xạ tuyến tính $f, g: V \to U$ thỏa mãn điều kiện của định lý. Khi đó với mọi $x \in V$ ta có : $x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n$.

Suy ra : $f(x) = f(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n)$

$$= a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + ... + a_n f(\alpha_n)$$
$$= a_1 g(\alpha_1) + a_2 g(\alpha_2) + ... + a_n g(\alpha_n)$$
$$= g(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n) = g(x)$$

Vậy : $f \equiv g$

4.2 Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

4.2.1 Các định nghĩa

Cho V, U là các không gian vectơ, $f: V \to U$ là ánh xạ tuyến tính.

Ký hiệu $\ker f = f^{-1}(O_U) = \{x \in V \mid f(x) = 0\} \subset V$ và gọi là hạt nhân của ánh xạ tuyến tính f.

Ký hiệu $\operatorname{Im} f = f(V) = \{f(x) \mid x \in V\} \subset U$ và gọi là ảnh của ánh xạ tuyến tính f.

Có thể chứng minh được $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ lần lượt là các không gian vectơ con của V và U.

Nếu (α) là một cơ sở của V thì $f((\alpha))$ là một tập sinh của $\operatorname{Im} f = f(V)$.

4.2.2 Tìm cơ sở cho Imf và Kerf

Để tìm cơ sở của $\operatorname{Im} f$ ta tìm cơ sở $\alpha_1, ..., \alpha_n$ của V. Khi đó :

$\operatorname{Im} f = \langle f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)\rangle$ và hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)$ là cơ sở của $\operatorname{Im} f$.

Để tìm cơ sở cho $\ker f$ ta chỉ cần tìm cơ sở cho không gian nghiệm của hệ PTTT $f(x) = O_U$

Ví dụ : Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ với

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + 4z - 7t, -3x - 2y + 5t, 2x + y - z - 2t, 3x + y - 3z - t)$$

Tìm cơ sở cho $\operatorname{Im} f$ và $\ker f$

Giải.

Tìm cơ sở của $\operatorname{Im} f$

Chọn một cơ sơ a tùy ý của $\mathbb{R}^4$, chẳng hạn ta chọn cơ sở chính tắc như sau :

$f(e_1) = f(1,0,0,0) = (1,-3,2,3)$

$f(e_2) = f(0,1,0,0) = (2,-2,1,1)$

$f(e_3) = f(0,0,1,0) = (4,0,-1,-3)$

$f(e_4) = f(0,0,0,1) = (-7,5,-2,-1)$

Tìm cơ sở của $\operatorname{Im} f$ từ một tập sinh :

Lập ma trận

$$\begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \\ f(e_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \\ -7 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận về dạng bậc thang

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \\ -7 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_4 \to d_4+3d_2 \\ d_3 \to d_3-2d_2 \\ d_2 \to d_2-2d_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_4 \to d_4+d_3+d_2 \\ d_3 \to d_3-d_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} f$ có một cơ sở là $(\alpha) = \{\beta_1 = (1,-3,2,3),\ \beta_2 = (0,4,-3,-5)\}$ và $\dim \operatorname{Im} f = 2$

Tìm cơ sở của $Kerf$

Ta giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + 2y + 4z - 7t = 0 \\ -3x - 2y \qquad + 5t = 0 \\ 2x + y - z - 2t = 0 \\ 3x + y - 3z - t = 0 \end{cases}$$

Ma trận mở rộng của hệ phương trình tuyến tính trên là :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -7 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{d_2 \to d_2+d_3 \\ d_3 \to d_3-2d_2 \\ d_4 \to d_4-3d_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 0 \\ 0 & -5 & -15 & 20 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1 \to d_1+2d_2 \\ d_2 \to -d_2 \\ d_3 \to d_3+3d_2 \\ d_4 \to d_4+5d_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nghiệm $z, t \in \mathbb{R}$ tùy ý, $x = 2z - t,\ y = 4t - z$

Cho $z = 1, t = 0$ ta được : $\alpha_1 = (2,-3,1,0)$

Cho $z = 0, t = 1$ ta được : $\alpha_2 = (-1,4,0,1)$

Vậy cơ sở của $Kerf$ là $\beta = \{\alpha_1 = (2,-3,1,0),\ \alpha_2 = (-1,4,0,1)\}$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$

4.2.3 Định lý (về mối liên hệ giữa số chiều của hạt nhân và ảnh)

Cho ánh xạ tuyến tính $f:V\to U$. Khi đó : $\dim Kerf+\dim\operatorname{Im} f=\dim V$

4.3 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

4.3.1 Định nghĩa :

Cho V và U là các không gian vectơ, $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ là cơ sở của V, $\{\beta_1,...,\beta_m\}$ là cơ sở của U và $f:V\to U$ là ánh xạ tuyến tính. Do $f(\alpha_i)\in U$ nên $f(\alpha_i)$ biểu thị tuyến tính được qua cơ sở (β) nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases} f(\alpha_1)=a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+...+a_{1m}\beta_m \\ f(\alpha_2)=a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+...+a_{2m}\beta_m \\ ... \\ f(\alpha_n)=a_{n1}\beta_1+a_{n2}\beta_2+...+a_{nm}\beta_m \end{cases}$$

Khi đó ma trận

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}$$

được gọi là ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha),(\beta)$ và kí hiệu là : $A_{f/(\alpha),(\beta)}$

Trường hợp đặc biệt, khi f là phép biến đổi tuyến tính của V, $f:V\to V$ và $(\beta)\equiv(\alpha)$ thì ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha),(\alpha)$ được gọi là ma trận của f trong cơ sở (α) và kí hiệu là : $A_{f/(\alpha)}$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, với $f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,x_1-x_2,-x_2)$

$(\alpha):\alpha_1=(1,1),\ \alpha_2=(1,0)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$

$(\beta):\beta_1=(1,1,1),\ \beta_2=(-1,2,1),\beta_3=(1,3,2)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha),(\beta)$ (tức là : $A_{f/(\alpha),(\beta)}$)

Giải

Giả sử : $f(\alpha_1)=a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3$ (1)

và : $f(\alpha_2)=b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3$ (2)

Khi đó, ma trận của ánh xạ f trong cặp cơ sở $(\alpha),(\beta)$ là :

$$A_{f/(\alpha),(\beta)}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Ta cần giải các phương trình vectơ (1), (2) để tìm a_1, a_2, a_3 và b_1, b_2, b_3.

Từ (1) và (2), ta có 2 hệ phương trình sau :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 3 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = -1 \end{cases} \text{ và : } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 - b_2 + b_3 = 1 \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 1 \\ b_1 + b_2 + 2b_3 = 0 \end{cases}$$

Vì ma trận hệ số của 2 phương trình trên là như nhau nên ta sẽ giải một lúc 2 hệ trên bằng ma trận mở rộng sau :

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -3 \end{array}\right]$$

Từ ma trận bậc thang sau cùng, ta được :

Hệ (1) : $a_1 = -8,\ a_2 = -5,\ a_3 = 6$

Hệ (2) : $b_1 = -4,\ b_2 = -2,\ b_3 = 3$

Vậy: $A_{f/(\alpha),(\beta)} = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -5 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

4.1 Các ánh xạ nào sau đây từ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là ánh xạ tuyến tính ? ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}$ là các không gian vectơ)

a) $(x, y) \mapsto 3x$ b) $(x, y) \mapsto xy^2$

c) $(x, y) \mapsto 2x - 3y$ d) $(x, y) \mapsto x - |y|$

4.2 Các ánh xạ nào sau đây từ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là ánh xạ tuyến tính ?

a) $(x, y) \mapsto (y, -x)$

b) $(x, y) \mapsto (1 - y, x)$ c) $(x, y) \mapsto (y^2, x)$

4.3 Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_4, x_3 + 2x_2 - x_4)$$

a) Chứng tỏ rằng f là ánh xạ tuyến tính

b) Tìm $Kerf$ và $\operatorname{Im} f$

4.4 Xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ biết :

$f(3,1)=(2,12)$, $f(1,1)=(0,2)$

4.5 Xác định ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ biết :

$f(1,2,3)=(1,0)$, $f(1,0,10)=(0,1)$, $f(2,3,5)=(15,-4)$

4.6 Xác định ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ biết :

$f(1,2,3)=(-1,0,1)$, $f(-1,1,1)=(0,1,0)$, $f(1,3,4)=(1,0,2)$

4.7 Trong $\mathbb{R}^3$ cho 2 cơ sở

(α): $u_1=(1,0,0)$, $u_2=(0,1,1)$, $u_3=(1,0,1)$

(β): $v_1=(1,-1,0)$, $v_2=(0,1,-1)$, $u_3=(1,0,1)$

và ánh xạ tuyến tính : $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, với $f(u_i)=v_i$, $i=\overline{1,3}$

a. Tìm công thức của $Q_2(x)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2$

b. Tìm các ma trận sau : $A_{f/(e^3)}$ $A_{f/(\alpha)}$, $A_{f/(\alpha),(\beta)}$, $A_{f/(\beta)}$, $A_{f/(\beta),(\alpha)}$

(với e^3 là cơ sở chuẩn tắc trong $\mathbb{R}^3$)

4.8 Tìm vectơ riêng, giá trị riêng của ma trận sau :

a. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ b. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{bmatrix}$

4.9 a. Tìm đa thức đặc trưng của ma trận: $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}$

b. Dựa vào đa thức đặc trưng, chứng minh A khả nghịch và chỉ ra biểu thức xác định A^{-1}

c. Tính $\det(A-2008I_3)$

d. Tìm GTR, vectơ riêng của A.

4.10 Tìm vectơ riêng, giá trị riêng và chéo hóa các ma trận sau :

a. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}5 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

4.11 Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở : $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,2,1)$, $u_3 = (1,3,2)$

và cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$f(u_1) = (0,5,3)$; $f(u_2) = (2,4,3)$; $f(u_3) = (0,3,2)$

a) Xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

b) Tìm một cơ sở để ma trận f trong cơ sở đó là ma trận chéo.

CHƯƠNG 5. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

5.1 Trị riêng-vectơ riêng

5.1.1 Đa thức đặc trưng

Cho A là ma trận vuông cấp n $(A \in M_n(\mathbb{R}))$. Ta gọi đa thức đặc trưng của ma trận A là đa thức

$$p_A(x) = \det(A - x.I_n)$$

Ví dụ. Tìm đa thức đặc trưng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = \det(A - x.I_3) = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & -1 \\ 2 & 2-x & 0 \\ 3 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = x^3 - 5\mathrm{x}^2 + 7\mathrm{x} - 8$$

5.1.2 Định lý Cayley – Hamilton:

Mỗi ma trận là nghiệm của đa thức đặc trưng của nó.

5.1.3 Giá trị riêng, vectơ riêng

Các nghiệm thực của đa thức đặc trưng $p_A(x)$ gọi là giá trị riêng của ma trận A Nếu λ_o là 1 giá trị riêng của A thì $\det(x_o.I_n - A) = 0$. Do đó, hệ phương trình thuần nhất :

$$(A - x_o.I_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

có vô số nghiệm. Không gian nghiệm của hệ $(\lambda_o.I_n - A)X = 0$ gọi là không gian con riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ_o. Các vectơ khác không là nghiệm của hệ $(\lambda_o.I_n - A)X = 0$ được gọi là các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng x_o.

5.1.4 Phương pháp tìm giá trị riêng, vectơ riêng.

Bước 1 : Tìm đa thức đặc trưng : $p_A(x) = \det(A - x.I_n)$

Bước 2 : Giải phương trình đa thức cấp n theo biến x: $p_A(x) = 0$ để tìm các trị riêng λ_i

Bước 3 : Đối với mỗi trị riêng λ_i, tìm các vectơ riêng tương ứng bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(A - \lambda_i I)X = 0$.

Ví dụ. Tìm giá trị riêng, vectơ riêng của ma trận A: $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Bước 1: Tìm đa thức đặc trưng của ma trận A**:**

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Bước 2: Giải phương trình đặc trưng : $P(\lambda) = 0$, ta có 2 giá trị riêng : $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$

Bước 3: Tìm các vectơ riêng :

Ta tìm các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 3y$$

Không gian con riêng của A ứng với $\lambda_1 = 1$ là $E(1) = \{(3a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

Các vectơ riêng của A ứng với $\lambda_1 = 1$ là tất cả các vectơ có dạng: $(3a, 2a)$ với $a \neq 0$ (vì vectơ riêng phải khác không).

Ta có $\dim E(1) = 1$ và A có 1 vectơ riêng ĐLTT ứng với $\lambda_1 = 1$ là $\alpha_1 = (3,2)$.

Ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 2$. Để tìm vectơ riêng ta giải hệ phương trình

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Không gian con riêng của A ứng với GTR $\lambda_2 = 2$ là $E(2) = \{(b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$

Các vectơ riêng của A ứng với $\lambda_2 = 2$ là tất cả các vectơ có dạng : (b, b) với $b \neq 0$

Ta có $\dim E(2) = 1$ và A có một vectơ riêng ĐLTT ứng với $\lambda_2 = 2$ là $\alpha_2 = (1,1)$.

5.1.5 Định lý

Nếu $X_1, X_2, ..., X_m$ lần lượt là m vec tơ riêng ứng với m trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m (m \leq n)$ của ma trận vuông $A = [a_{ij}]_{nxm}$ thì hệ vectơ $\{X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_m\}$ độc lập tuyến tính. Nói cách khác, các vec tơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau của A tạo thành một hệ vec tơ độc lập tuyến tính.

5.2 Chéo hóa ma trận

5.2.1 Định nghĩa

Ma trận vuông A cấp n được gọi là chéo hóa được nếu tồn tại ma trận T vuông cấp n không suy biến sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

Ma trận T được gọi là ma trận làm chéo A, và ma trận A được chéo hóa bởi ma trận T

Câu hỏi đặt ra là có phải ma trận vuông nào cũng chéo hóa được không, điều kiện để ma trận vuông chéo hóa được là gì và tìm ma trận T như thế nào ? Ta bắt đầu bằng định lí sau:

5.2.2 Định lí (Điều kiện chéo hoá được)

$A \in M_n(K)$ chéo hoá được khi và chỉ khi A có đủ n vectơ riêng độc lập tuyến tính hay $\sum_{i=1}^{k} \dim E(\lambda_i) = n$, với $\lambda_1, ..., \lambda_k$ là tất cả các giá trị riêng của A.

Ma trận T làm chéo hóa A là ma trận có các cột là n vectơ riêng độc lập tuyến tính của A nói cách khác các cột của T là các cơ sở của các không gian con riêng của A.

Từ định lí trên ta suy ra phương pháp chéo hoá ma trận vuông A như sau:

Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng độc lập tuyến tính của A. Khi đó xảy ra một trong hai khả năng sau :

Nếu tổng số vectơ riêng ĐLTT của A bé hơn n thì A không chéo hoá được (tức là không tồn tại $T \in M_n(K)$ để $T^{-1}AT$ là ma trận chéo)

Nếu tổng số vectơ riêng độc lập tuyến tính của A bằng n thì A chéo hoá được. Khi đó ma trận T cần tìm là ma trận mà các cột của nó chính là các vectơ riêng độc lập tuyến tính của A viết theo cột và :

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$$

là ma trận chéo. Trong đó λ_i là giá trị riêng của A ứng với vectơ riêng là vectơ cột thứ i của ma trận T.

Ví dụ. Chéo hoá ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ (nếu được).

Ma trận A có 2 giá trị riêng là : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ và có 2 vectơ riêng độc lập tuyến tính là : $\alpha_1 = (3,2)$ và $\alpha_2 = (1,1)$. Do số vectơ riêng bằng cấp của A nên chéo hóa được.

Ma trận T cần tìm là : $T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Nếu chọn $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ thì $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.3 Dạng toàn phương

5.3.1 Dạng toàn phương

Định nghĩa Dạng toàn phương trên R^n là đa thức đẳng cấp bậc 2 của n biến $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = X^T AX = [x_1, x_2, ..., x_n]\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

trong đó A là ma trận đối xứng.

Ma trận A được gọi là ma trận của dạng toàn phương.

Ví dụ. $Q_2(x) = X^T AX = [x_1, x_2]\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2$ là dạng toàn phương trên R^2 với ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Ví dụ.

$$Q_3(x) = x^T Ax = [x_1, x_2, x_3]\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_2^2$$

là dạng toàn phương trên R^3 với ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ.

Tìm ma trận của dạng toàn phương $Q(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1x_3 + 3x_3^2 + 2x_2x_3$

Ta viết lại

$$Q(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + x_2^2 + 3x_1x_3 + 3x_3x_1 + 3x_3^2 + x_2x_3 + x_3x_2$$

Do đó

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5.3.2 Phân loại dạng toàn phương

Dạng toàn phương Q(x) được gọi là:

1)Xác định dương, nếu $Q(x) > 0, \forall x \neq 0$

2) Nửa xác định dương, nếu $Q(x) \geq 0, \forall x \neq 0$

3) Xác định âm, nếu $Q(x) < 0, \forall x \neq 0$

4) Nửa xác định âm, nếu $Q(x) \leq 0, \forall x \neq 0$

5) Không xác định dấu, nếu ngoài các trường hợp trên.

Ví dụ. $Q_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2$ là dạng toàn phương xác định dương trên R^2.

$Q_2(x) = x_1^2 + 2x_3^2$ là dạng toàn phương nửa xác định dương trên R^3.

$Q_3(x) = x_1^2 - 2x_2^2$ là dạng toàn phương không xác định dấu trên R^2.

5.3.3 Dạng chính tắc của dạng toàn phương

Dạng toàn phương Q(x) được gọi là ở dạng chính tắc nếu:

$$Q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

Ví dụ. Trong R^3 các dạng toàn phương sau ở dạng chính tắc:

$Q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2$ ma trận tương ứng $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$Q_2(x) = 2x_1^2 - x_2^2$ ma trận tương ứng $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Q_3(x) = x_2^2 + 3x_3^2$ ma trận tương ứng $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Dễ thấy ma trận của dạng toàn phương chính tắc là ma trận chéo

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

5.4 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Một dạng toàn phương ở dạng chính tắc có cấu trúc rõ ràng, dễ nghiên cứu, phân loại. Trong phạm vi chương trình chúng ta xét các phương pháp sau đưa dạng toàn phương bất kỳ về dạng chính tắc

5.4.1 Định lí (Phương pháp biến đổi trực giao)

Cho dạng toàn phương $Q(x) = X^T AX$ với $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ là các trị riêng của A. T là ma trận trực giao làm chéo hóa A tức là $T^{-1}AT = D$. Khi đó, bằng cách đổi biến $X = TY$ ta được:

$$X^T AX = Y^T DY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Chứng minh.

Vì T là ma trận trực giao nên: $T^T = T^{-1}$. Ngoài ra D là ma trận chéo nên

$$X^T AX = (TY)^T A(TY) = Y^T T^T ATY = Y^T T^{-1} ATY = Y^T DY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Thuật toán biến đổi trực giao:

Bước 1: Viết ma trận A của dạng toàn phương

Bước 2: Chéo hóa A bởi ma trận trực giao T, tức là tìm ma trận trực giao T sao cho: $T^{-1}AT = D$, với D là ma trận chéo.

Bước 3: Kết luận dạng chính tắc cần tìm là:

$$Q'(y) = Y^T DY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

với $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ là các trị riêng của A

Ví dụ. Cho dạng toàn phương: $Q(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$

Ma trận của Q là $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Ma trận A có các trị riêng: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$ với 3 vectơ riêng trực chuẩn

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right); u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Do đó dạng chính tắc là: $Q'(y) = y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2$ với phép đổi biến: $X = TY$ hay

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

5.4.2 Phương pháp Lagrange

Nội dung của phương pháp Lagrange là biến đổi biểu thức tọa độ của dạng toàn phương thành các tổng bình phương. Thuật toán Lagrange có thể chia làm các bước sau:

Bước 1: Chọn một số hạng có chứa x_k^2 $(a_{kk} \neq 0)$.

(Nếu không có số hạng nào như vậy trong biểu thức tọa độ của dạng toàn phương thì có thể tìm được $a_{ij} \neq 0$, ta đổi biến:

$$x_i^{'} = \frac{x_i + x_j}{2};\ x_j^{'} = \frac{x_i - x_j}{2};\ x_k^{'} = x_k,\ (k \neq i, k \neq j).$$

Khi đó xuất hiện số hạng chứa $x_i^{'2}$)

Bước 2: Tách biểu thức tọa độ của dạng toàn phương thành 2 nhóm: một nhóm có chứa x_k, nhóm còn lại không chứa x_k

Bước 3: Trong nhóm thứ nhất ta lập thành tổng bình phương

Bước 4: Quay lại bước 1,2,3 cho nhóm thứ hai và cứ thế tiếp tục cho đến khi tìm được dạng chính tắc.

Ví dụ. Đưa dạng toàn phương $Q(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$ về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

Ta có:

$$\begin{aligned}
Q(x) &= 2x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2 \\
&= (2x_1^2 - 2x_1x_3) + (2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2) \\
&= 2\left(x_1^2 - 2x_1\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_3^2\right) + \left(2x_2^2 - 2x_2x_3 + \frac{5}{2}x_3^2\right) \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 2\left(x_2^2 - 2x_2\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_3^2\right) + 2x_3^2 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 2\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 2x_3^2 \\
&= 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2
\end{aligned}$$

Trong đó $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_3$; $y_2 = x_2 - \frac{1}{2}x_3$; $y_3 = x_3$

Nhận xét: Một dạng toàn phương có thể có nhiều dạng chính tắc khác nhau.

5.4.3 Luật quán tính.

Như trên ta đã thấy, một dạng toàn phương có thể có nhiều dạng chính tắc khác nhau. Tuy nhiên các dạng chính tắc này đều có đặc điểm chung là số các hệ số dương và âm là bất biến.

Số các hệ số dương (âm) trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương gọi là chỉ số quán tính dương (âm).

5.4.4 Định lý.

Chỉ số quán tính dương (âm) trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương không phụ thuộc vào phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

5.4.5 Định lý (Dạng toàn phương xác định dấu)

Cho dạng toàn phương Q(x) trên R^n. Q(x) xác định dương (âm) khi và chỉ khi chỉ số quán tính dương (âm) bằng n.

Ví dụ.

1) Trong R^3, dạng toàn phương: $Q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2$ có chỉ số quán tính dương bằng 3 nên nó xác định dương.

2) Trong R^4, dạng toàn phương: $Q(x) = -5x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2$ có chỉ số quán tính âm bằng 4 nên nó xác định âm

Nhận xét: Một dạng toàn phương xác định dương (âm) khi và chỉ khi ma trận của nó chỉ có các trị riêng dương (âm). Một dạng toàn phương là nửa xác định dương (âm) khi và chỉ khi ma trận của nó có trị riêng bằng không và các trị riêng còn lại đều dương (âm).

5.4.6 Định lý (Sylvester)

Giả sử dạng toàn phương Q có ma trận A. Khi đó:

i) Q xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính Δ_k của A đều dương

ii) Q xác định âm khi và chỉ khi các định thức con chính của A đan dấu với $\Delta_1<0$

Ví dụ. Xét dạng toàn phương: $Q(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2 + 2x_1x_3$

Ma trận của dạng toàn phương $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Các định thức con chính:

$$\Delta_1 = -1 < 0\ ;\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0\ ;\ \ \Delta_3 = |A| = -1 < 0\,.$$

Vậy Q(x) là dạng toàn phương xác định âm.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

5.1 Tìm ma trận của các dạng toàn phương (trong cơ sở chính tắc):

a) $Q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

b) $Q_2(x) = 3x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_1x_2 + 4x_1x_3$

5.2 Viết ma trận và biểu thức tọa độ của các dạng toàn phương ở câu trên trong cơ sở

$F = \{ f_1 = (0,0,1);\ f_2 = (1,-1,0);\ f_3 = (1,1,1)\}$

5.3 Cho các dạng toàn phương:

a) $Q_1(x) = 2x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2$

b) $Q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2$

c) $Q_3(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

d) $Q_4(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

Hãy tìm một dạng chính tắc của các dạng toàn phương trên bằng phương pháp biến đổi trực giao.

5.4 Cũng với câu hỏi như trên nhưng sử dụng phương pháp Lagrange.

5.5 Tìm một dạng chính tắc của các dạng toàn phương sau bằng phương pháp Lagrange:

a) $Q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

b) $Q_2(x) = -x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

c) $Q_3(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

d) $Q_3(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 + x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

5.6 Sử dụng tiêu chuẩn Sylvester, cho biết dạng toàn phương nào sau đây là xác định dương, xác định âm:

a) $Q_1(x) = -2x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_3 - x_2x_3$

b) $Q_2(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

c) $Q_3(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3$

5.7 Tìm a để dạng toàn phương sau xác định dương:

$$Q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + \left(\frac{15 - a^2}{2}\right)x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - x_2x_3$$

5.8 Với giá trị nào của b thì dạng toàn phương: $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + bx_1x_3$ là xác định dương, nửa xác định dương?

MỤC LỤC